XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Клетки доски 2015×2016 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски? (Белоруссия, 2016)

**2.** Найдите все натуральные числа *n*, для которых число 1−5*n*+52*n*+1 является точным квадратом. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2014)

**3.** Мальвина написала на доске 30 различных натуральных чисел от 1 до 2016. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями, вне зависимости от начальных чисел? (Ибероамериканская олимпиада, 2015)

**4.** Положительные числа *a*, *b*, *c* удовлетворяют условию *abc*(*a*+*b*+*c*) = 3. Докажите, что (*a*+*b*)(*b*+*c*)(*c*+*a*) ≥ 8. (Индия, региональная олимпиада, 2012)

**5.** У Павиана и Бабуина есть *n* ≥ 5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких *n* Павиан может победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усложнение)

**6.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *AD*. Точки *M* и *N* — середины отрезков *AD* и *BC*, *P* — произвольная точка на отрезке *MN*. Прямая, проходящая через *P* параллельно *BC*, пересекает *CA* и *AB* в точках *K* и *H*. Прямые, проходящие через точку *P* параллельно *AC* и *AB*, пересекают отрезок *BC* в точках *T* и *S*. Докажите, что трапеция *HKTS* является равнобокой. (Форум artofproblemsolving)

**7.** Пусть *D*, *E*, *F* — середины сторон *BC*, *CA*, *AB* треугольника *ABC* соответственно; *I* — точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Прямые *BI* и *ED* пересекаются в точке *P*, прямые *CI* и *FD* пересекаются в точке *Q*. Прямая *PQ* пересекает стороны *AB* и *AC* в точках *T* и *S* соответственно. Докажите, что треугольник *ATS* равнобедренный. (Саудовская Аравия, отбор на Балканиаду, 2013)

**8.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Клетки доски 2015×2016 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски? (Белоруссия, 2016)

**2.** Найдите все натуральные числа *n*, для которых число 1−5*n*+52*n*+1 является точным квадратом. (Саудовская Аравия, предварительный отбор кандидатов в команду, 2014)

**3.** Мальвина написала на доске числа 1, 2, …, 30. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями? (Ибероамериканская олимпиада, 2015)

**4.** Действительные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что *a*+*b* = *cd* и *c*+*d* = *ab*. Докажите неравенство (*a*+1)(*b*+1)(*c*+1)(*d*+1) ≥ 0. (Польша, математическая олимпиада для гимназистов, 2 этап, 2015-2016)

**5.** У Павиана и Бабуина есть *n* ≥ 5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких *n* Павиан может победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усложнение)

**6.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведена высота *AD*. Точки *M* и *N* — середины отрезков *AD* и *BC*, *P* — произвольная точка на отрезке *MN*. Прямая, проходящая через *P* параллельно *BC*, пересекает *CA* и *AB* в точках *K* и *H*. Прямые, проходящие через точку *P* параллельно *AC* и *AB*, пересекают отрезок *BC* в точках *T* и *S*. Докажите, что трапеция *HKTS* является равнобокой. (Форум artofproblemsolving)

**7.** Пусть *D*, *E*, *F* — середины сторон *BC*, *CA*, *AB* треугольника *ABC* соответственно; *I* — точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Прямые *BI* и *ED* пересекаются в точке *P*, прямые *CI* и *FD* пересекаются в точке *Q*. Прямая *PQ* пересекает стороны *AB* и *AC* в точках *T* и *S* соответственно. Докажите, что треугольник *ATS* равнобедренный. (Саудовская Аравия, отбор на Балканиаду, 2013)

**8.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Клетки доски 5×6 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски? (Белоруссия, 2016)

**2.** Дано четырёхзначное число *A*, в записи которого нет нулей и девяток. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число *B*. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число *C*. Могло ли оказаться, что *C*−*B* = *A*? (Д. Ширяев, С. Берлов)

**3.** Мальвина написала на доске числа 1, 2, …, 30. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями? (Ибероамериканская олимпиада, 2015)

**4.** Действительные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что *a*+*b* = *cd* и *c*+*d* = *ab*. Докажите неравенство (*a*+1)(*b*+1)(*c*+1)(*d*+1) ≥ 0. (Польша, математическая олимпиада для гимназистов, 2 этап, 2015-2016)

**5.** У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усиление)

**6.** Пусть *AM* ⎯ медиана треугольника *ABC*, *N* ⎯ точка на стороне *AB*. Отрезки *AM* и *CN* пересекаются в точке *K*. Оказалось, что ∠*BNC* = 2∠*BAM*. Докажите, что *AB* = *CK*. (Фольклор)

**7.** Пусть *D*, *E*, *F* — середины сторон *BC*, *CA*, *AB* треугольника *ABC* соответственно; *I* — точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Прямые *BI* и *ED* пересекаются в точке *P*, прямые *CI* и *FD* пересекаются в точке *Q*. Прямая *PQ* пересекает стороны *AB* и *AC* в точках *T* и *S* соответственно. Докажите, что треугольник *ATS* равнобедренный. (Саудовская Аравия, отбор на Балканиаду, 2013)

**8.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** Дано натуральное число *n*. Назовем клетчатый прямоугольник *большúм*, если каждая из его сторон больше 100*n*. При каком наименьшем *k* из любого большого прямоугольника можно вырезать несколько полосок 1×2*n* так, чтобы осталось не более *k* клеток? (С. Берлов, Д. Ширяев)

**2.** У Павиана и Бабуина есть *n* ≥ 5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких *n* Павиан может победить? (Д. Карпов по мотивам задачи: Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс)

**3.** Кирилл написал на заборе в строчку число 21 четное число раз. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом. (Д. Карпов, А. Храбров, В. Брагин)

**4.** Взаимно простые в совокупности натуральные числа *a*, *b* и *c* удовлетворяют условию *ab* = *ac*+*bc*. Докажите, что *abc* ⎯ точный квадрат. (Модификация задачи Neculai Stanciu)

**5.** В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад. (Hong-Kong TST–2016)

**6.** На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать **целое** число *n*, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить *n* к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел. (Ибероамериканская олимпиада, 2015, упрощение)

**7.** Среди чисел *a*, *b*, *c* и *d* два положительных и два отрицательных. Докажите, что |*x*–*a*|+|*x*–*b*|+|*x*–*c*|+|*x*–*d*| ≥ |*a*|+|*b*|+|*c*|+|*d*| при любом *x*. (А. Храбров)

**8.** Дан треугольник *ABC*. Известно, что ∠*B* = 3∠*C*. На стороне *AC* отмечены такие точки *M* и *N*, что ∠*ABM* = ∠*MBN* = ∠*NBC*. Перпендикуляр, опущенный из точки *A* на прямую *BN*, пересекает отрезок *BM* в точке *K*. Докажите, что *NK* ⎯ биссектриса угла *ANB*. (Recreatii matematice, 2012, II, задача VI.149)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** Назовем клетчатый прямоугольник *большúм*, если каждая из его сторон больше 100. При каком наименьшем *k* из любого большого прямоугольника можно вырезать несколько полосок 1×6 так, чтобы осталось не более *k* клеток? (С. Берлов, Д. Ширяев)

**2.** У Павиана и Бабуина есть *n* ≥ 5000 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. При каких *n* Павиан может победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усложнение)

**3.** Кирилл написал на заборе в строчку 120 раз число 21. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом. (Д. Карпов, А. Храбров, В. Брагин)

**4.** Взаимно простые в совокупности натуральные числа *a*, *b* и *c* удовлетворяют условию *ab* = *ac*+*bc*. Докажите, что *abc* ⎯ точный квадрат. (Модификация задачи Neculai Stanciu)

**5.** В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад. (Hong–Kong TST–2016)

**6.** На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать **целое** число *n*, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить *n* к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел. (Ибероамериканская олимпиада, 2015, упрощение)

**7.** Среди чисел *a*, *b*, *c* и *d* два положительных и два отрицательных. Докажите, что |*x*–*a*|+|*x*–*b*|+|*x*–*c*|+|*x*–*d*| ≥ |*a*|+|*b*|+|*c*|+|*d*| при любом *x*. (А. Храбров)

**8.** Дан треугольник *ABC*. Известно, что ∠*B* = 3∠*C*. На стороне *AC* отмечены такие точки *M* и *N*, что ∠*ABM* = ∠*MBN* = ∠*NBC*. Перпендикуляр, опущенный из точки *A* на прямую *BN*, пересекает отрезок *BM* в точке *K*. Докажите, что *NK* ⎯ биссектриса угла *ANB*. (Recreatii matematice, 2012, II, задача VI.149)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**2.** У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усиление)

**3.** Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа. (Модификация задачи Д. Карпова)

**4.** Незнайка похвастался, что смог составить четыре натуральных числа, первое из которых делится на 36, второе ⎯ на 37, третье ⎯ на 38, а четвёртое ⎯ на 39. При этом цифра 0 в записи чисел не содержится, а цифры 1, 2, …, 9 использованы ровно по одному разу. Не ошибся ли он? (Харьков, областная олимпиада. 24 января 2016 года, 7 класс)

**5.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (С. Волченков по мотивам Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

**6.** На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать **целое** число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел. (Ибероамериканская олимпиада, 2015, упрощение)

**7.** Числа *a* и *b* имеют разные знаки. Докажите, что |*x*+*a*|+|*x+b*| ≥ |*a*|+|*b*| при любом *x*. (А. Храбров)

**8.** Дан треугольник *ABC*. Известно, что ∠*B* = 3∠*C*. На стороне *AC* отмечены такие точки *M* и *N*, что ∠*ABM* = ∠*MBN* = ∠*NBC*. Перпендикуляр, опущенный из точки *A* на прямую *BN*, пересекает отрезок *BM* в точке *K*. Докажите, что *NK* ⎯ биссектриса угла *ANB*. (Recreatii matematice, 2012, II, задача VI.149)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

**1.** Дан квадрат с нечетной стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать одну клетку таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**2.** У Павиана и Бабуина есть 2016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан и съедает любое число бананов. Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 1017 бананов. Может ли Павиан этого добиться? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, упрощение)

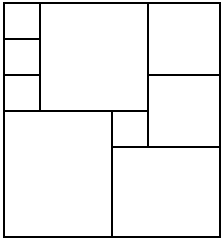
**3.** Кирилл написал на заборе в строчку число 21 ровно 100 раз. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом. (Д. Карпов, А. Храбров, В. Брагин)

**4.** Незнайка похвастался, что смог составить четыре натуральных числа, первое из которых делится на 36, второе ⎯ на 37, третье ⎯ на 38, а четвёртое ⎯ на 39. При этом цифра 0 в записи чисел не содержится, а цифры 1, 2, …, 9 использованы ровно по одному разу. Не ошибся ли он? (Харьков, областная олимпиада. 24 января 2016 года, 7 класс)

**5.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (С. Волченков по мотивам Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

**6.** Учитель написал на доске обыкновенную дробь. Сначала к доске вышла Аня и прибавила к её знаменателю числитель. Затем к доске вышел Боря и к числителю новой дроби прибавил её знаменатель. Наконец, к доске вышел Вася и снова прибавил к знаменателю новой дроби её числитель. В итоге оказалось, что на доске написано . Какая дробь была на доске изначально? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 8 класс)

**7.** Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова ⎯ 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима ⎯ 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто? (С. Берлов, Д. Ширяев, С. Волченков)

**8.** Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами? (С. Волченков. Ярославские дистанционные игры)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

**1.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

**2.** Набор гирь будем называть *крепким*, если из этого набора можно удалить гирю так, чтобы средний вес гирь набора не изменился. Есть набор из *n* > 2 гирь. Докажите, что если после удаления любой из гирь этот набор становится крепким, то он изначально крепкий. Средний вес гирь набора ⎯ это сумма весов всех гирь набора, делённая на количество гирь в наборе. (С. Берлов)

**3.** Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**4.** Дано натуральное число *A*, в записи которого нет нулей и девяток и которое состоит из чётного числа цифр. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число *B*. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число *C*. Оказалось, что *A*+*B* = *C*. Докажите, что у числа *A* найдутся две цифры (возможно, равные), сумма которых равна 8. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**5.** Петя, Вася и Толя пошли в магазин. Петя купил 6 груш, апельсин и 2 лимона. Вася купил 2 груши, 4 апельсина и 4 лимона. Наконец, Толя купил 5 груш, 2 апельсина и 3 лимона. При этом одному из мальчиков при покупке сделали скидку. В результате оказалось, что все мальчики заплатили поровну. Кому из мальчиков сделали скидку? (С. Берлов, Д. Ширяев)

**6.** Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа. (Модификация задачи Д. Карпова)

**7.** У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усиление)

**8.** В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад. (Hong-Kong TST-2016)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

**1.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

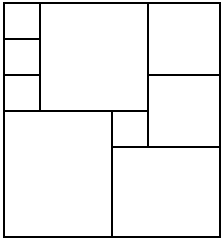
**2.** Есть набор из *n*> 2 гирь попарно различных весов. Докажите, что из него можно удалить одну гирю так, чтобы в полученном наборе ни одна гиря не совпадала по весу со средним весом всех остальных. Средний вес набора гирь ⎯ это сумма их весов, делённая на их количество. (С. Берлов)

**3.** Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 14. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**4.** Дано натуральное число *A*, в записи которого нет нулей и девяток и которое состоит из чётного числа цифр. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число *B*. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число *C*. Оказалось, что *A*+*B* = *C*. Докажите, что у числа *A* найдутся две цифры (возможно, равные), сумма которых равна 8. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**5.** Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова  5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима  8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто? (С. Берлов, Д. Ширяев)

**6.** Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа. (Модификация задачи Д. Карпова)

**7.** У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усиление)

**8.** Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами? (С. Волченков. Ярославские дистанционные игры)

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016**

# ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

**1.** В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе? (С. Волченков по мотивам Közepiskolai Matematikai Lapok, B 4762)

**2.** Учитель написал на доске обыкновенную дробь. Сначала к доске вышла Аня и прибавила к её знаменателю числитель. Затем к доске вышел Боря и к числителю новой дроби прибавил её знаменатель. Наконец, к доске вышел Вася и снова прибавил к знаменателю новой дроби её числитель. В итоге оказалось, что на доске написано . Какая дробь была на доске изначально? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 8 класс)

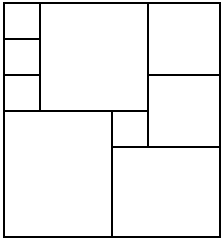
**3.** Дан квадрат с нечетной стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать одну клетку таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4. (Д. Ширяев, С. Берлов)

**4.** Дано четырёхзначное число *A*, в записи которого нет нулей и девяток. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число *B*. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число *C*. Могло ли оказаться, что *C*−*B* = *A*? (Д. Ширяев, С. Берлов)

**5.** У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить? (Харьков, городская олимпиада. 18 октября 2015 года, 7 класс, усиление)

**6.** Кирилл написал на заборе в строчку число 24 ровно 300 раз. Докажите, что полученное число 242424…24 не является точным квадратом. (Д. Карпов, А. Храбров, В. Брагин, С. Волченков)

**7.** Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова ⎯ 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима ⎯ 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто? (С. Берлов, Д. Ширяев, С. Волченков)

**8.** Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами? (С. Волченков. Ярославские дистанционные игры)